از اولين موضوعاتي كه در اپتيک بدان اشاره مي شود، اين است كه سرعت نور در برخورد با محيط هاي غيرشفاف به $\frac{1}{n}$سرعت آن در خلأ كاهش مي يابد. كه ضريب شكست آن محيط است.
اين مسئله را با استفاده از تئوري الكترودیناميک هم مي توان حل كرد: در محيط غيرشفاف يادر اينجا اصطلاحاً "ماده دي الكتريک"، گذردهي ديگر e_0 نيست بلكه مقداري ديگر دارد (e)، كه تابعي معلوم از ويژگيهاي بنيادي تر ماده دي الكتريک يعني پذيرفتاري الكتريكي آن(c_e) است. حل معادله ماكسول با گذردهي جديد منجر به موج جديدي مي شود كه با سرعتي كمتر از C، يعني $\frac{C}{n}$ حركت مي كند. رابطه c و اين ضريب n نيز به سادگي بدست مي آيد. اگر بخواهيم كمي پيش تر رويم، دامنه امواج عبوري و بازتابي را نيز مي توانيم با اعمال شرايط مرزي معادلات ماكسول در مرز دي الكتريک بدست آوريم. در اين جا مسئله كاملاً از ديد نظري به نحو قابل قبولي حل شده است اما اگر كمي با دقت به آن بينديشيد خواهيد ديد كه نقش دقيق قطبش القا شده در ماده دي الكتريک توسط موج بدرستي شناخته نشده است. معادله ماكسول مثل شعبده بازيست و بدون اينكه به ما اجازه درک جزييات ماجرا را بدهد، به اصطلاح خودمان ناگهان جواب را از كلاهش بيرون مي كشد و جلو ما مي گذارد! در اين مقاله خواهيم كوشيد تا بدون استفاده از اين ويژگي معجزه آساي معادله ماكسول و با بررسي دقيق جزييات آن چه كه عملاً در دي الكتريک اتفاق مي افتد، با استفاده از روش اختلال همان نتايج قبلي را بدست آوريم. اگر در چندسال اخير در دانشكده خودمان الكترومغناطيس گذرانده باشيداحتمالاً با اين مسئله سر كلاس برخورد كرده ايد و شايد تا يكي دو مرتبه از مسئله را حل كرده باشيد. دراين صورت الآن هم آمادگي، هم اشتياق لازم را براي حل كامل مسئله داريد! اما قبل از حل مسئله به روش اختلال ابتدا مروري بر راه حل عادي و ساده مسئله خواهيم كرد:

****

معادلات ماكسول در خلا عبارتند از:

$$1)\vec{\nabla}.\vec{E} = (\frac{1}{e_0})r$$

$$2)\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$3)\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$$

$$4)\vec{\nabla}\times\vec{B} = m_0 J + m_0 e_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

با گرفتنCurlاز معادله ۲ و استفاده از اتحاد $\nabla\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \nabla(\nabla.B) - \nabla^2 E$ و قرار دادن r وJ برابر صفر، به معادله موج $\nabla^2 E = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$مي رسيم كه در آنV سرعت موج و برابر $\frac{1}{\sqrt{e_0 m_0}}$ است.
در محيط دي الكتريک معادلات ۱و ۴ به اين صورت در مي آيند:

$$1)\nabla.D = \frac{1}{e_0} r_f$$

$$4)\vec{\nabla}\times\vec{B}=m_0 J_f + m_0 e_0 \frac{\partial D}{\partial t}$$

يا با توجه به تعريفD :

$$1)\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{1}{e} r_f$$

$$4)\vec{\nabla}\times\vec{B}=m_0 J_f + m_0 e \frac{\partial B}{\partial t}$$

كه r_f و J_f چگالي بار و جريان آزاد هستند و e عبارت است از:

$$e=(1+c_e)e_0$$

با قرار دادن r_f و J_f برابر صفر موجي خواهيم داشت اين بار با سرعت:

$$V=\frac{1}{\sqrt{m_0 e}}=\frac{C}{\sqrt{1+c_e}}$$

اگر $\sqrt{1+c_e}$را به عنوان ضريب شكست يا n محيط دي الكتريک تعريف كنيم، اين همان نتيجه مطلوب خواهد بود: سرعت نور در محيط دي الكتريک سرعت آن در خلا است.

براي محاسبه دامنه موج عبوري و بازتابي فرض مي كنيم در ناحيه $x<0$ خلا و در $x>0$ ماده دي الكتريک قرار دارد و براي سادگي فرض مي كنيم كه موجي كه از خلا به صورت عمودي بر فصل مشترک دو محيط مي تابد.

موج فرودي:

$$E^I(x,t)=E_0 e^{i(kx-wt)}\hat{j}$$

$$B^I(x,t)=(\frac{1}{C})E_0 e^{i(kx-wt)}\hat{k}$$

موج بازتابي:

$$E^R(x,t)=E_R e^{i(-kx-wt)}\hat{j}$$

$$B^R(x,t)=-(\frac{1}{C})E_R e^{i(-kx-wt)}\hat{k}$$

موج عبوري:

$$E^T(x,t)=E_T e^{i(k'.x-wt)}\hat{j}$$

$$B^T(x,t)=(\frac{n}{C})E_T e^{i(k'.x-wt)}\hat{k}$$

$$k'=\frac{nw}{C}$$

$$k=\frac{w}{C}$$

در x=0 این موج باید شرایط مرزي را در معادله ماکسول ارضا کند:

$$1) e_1 E_{1\perp} = e_2 E_{2\perp}$$
$$2) B_{1\perp} = B_{2\perp}$$
$$3) E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$$
$$4) (\frac{1}{m_1}) B_{1\parallel} = (\frac{1}{m_2}) B_{2\parallel}$$

در این مثال خاص یعني تابش عمودي $E_\perp$ و $B_\perp$ صفرند و فرض مي کنیم $m_1 = m_r$ باشد. بنابراین تنها لازم است کهE وB در مرز پیوسته باشند.

$$E_0 + E_R = E_T$$
$$E_0 - E_R = nE_T$$

که از آن خواهیم داشت:

$$E_T = (\frac{2}{n+1}) E_0$$
$$E_R = -\frac{(n-1)}{(n+1)} E_0$$

بنابراین امواج عبوري و بازتابي به این صورت درخواهند آمد:

$$E^T(x,t) = \frac{2}{1+\sqrt{1+c_e}} E_0 e^{i(\sqrt{1+c_e}kx - wt)} \hat{j}$$
$$E^R(x,t) = -(\frac{\sqrt{1+c_e}-1}{\sqrt{1+c_e}+1}) E_0 e^{i(-kx-wt)} \hat{j}$$

روش اختلالي

در روش اختلالي اساس روش ما به این صورت است: فرض مي کنیم در مرتبه صفرم، موج فرودي عیناً وارد دي الکتریک مي شود. دي الکتریک تحت تأثیر میدان الکتریکي این موج، قطبیده مي شود و تغییرات زماني این قطبش مرتبه اول، منجر به تابش یک موج مرتبه اول مي شود. خود این موج یک قطبش مرتبه دوم ایجاد مي کند که آن هم به نوبه خود موج مرتبه دوم را تولید مي کند و همین ترتیب تا ... ! از جمع تمام این امواج مرتبه ـام و با مقدار زیادي محاسبه، اموراج عبوري و بازتابي بدست مي آیند و به نحو شگفت انگیزي، هم سرعت و هم دامنه ها همان هایي بدست مي آیند که انتظار داریم. از این جا به بعد با محاسبات زیادي مواجه خواهیم شد که در بعضي مراحل، براي صرفه جویي در جا جزییات رسیدن از یک رابطه به رابطه بعدي نوشته نشده است. توصیه مي کنم همه این مراحل را خودتان تحقیق کنید.

مرتبه صفرم، میدان الکتریکي عیناً وارد دي الکتریک مي شود:

$$E^0(x,t) = E_0 e^{i(kx-wt)} \hat{j} \qquad (x>0)$$

قطبش ناشي از این مي دان چنین است:

$$P^1(x,t) = e_0 c_e e^{i(kx-wt)} \hat{j}$$

چگالي جریان قطبش حاصل:

$$J^1{}_P(x,t)=\frac{\partial P}{\partial t}=-iwe_0c_eE_0e^{i(kx-wt)}\hat{j}$$

براي محاسبه ميدان حاصله، دي الکتريک را به صفحات موازي نازک مي بريم.(شکل ۲)

به سادگي مي توانيد بدست آوريد که ميدان الکتريکي در فاصله از يک صفحه خنثي با چگالي جريان سطحي k(t) برابر است با:

$$E=-(\frac{m_0C}{2})K(t-\frac{d}{C})$$

سعي کنيد خودتان اين رابطه را بدست آوريد.(اگر نتوانستيد مي توانيد جواب را در پيوست انتهاي قسمت دوم مقاله ببينيد).

بنابراين ميدان الکتريکي ناشي از J'_P در نقطهx برابر است با:

$$E'(x,t)=(-\frac{m_0C}{2})(-iwe_0c_eE_0\hat{j})\times(\int_0^x e^{i[kx'-w(t-\frac{(x-x')}{C})]}dx'+\int_x^\infty e^{i[kx'-w(t-\frac{(x-x')}{C})]}dx')=$$

$$\frac{ik}{C}c_eE_0\hat{j}(e^{i(kx-wt)}\int_0^x dx'+e^{i(-kx-wt)}\int_x^\infty e^{2ikx'}dx')=$$

$$(\frac{c_e}{4})(1-2ikx)\overrightarrow{E^0}(x,t) \qquad (x>0)$$

اين ميدان مرتبه اول قطبش مرتبه دوم p^2 را توليد مي کند:

$$p^2(x,t)=e_0c_eE'(x,t)$$

که منجر به جريان $J_P{}^2$ مي شود:

$$J_P{}^2=iwe_0c_eE'(x,t)$$

ميدانمرتبه دوم حاصله عبارت است از: (حساب کنيد!)

$$E^2(x,t)=(\frac{c_e{}^2}{2})(1-2ikx-k^2x^2)E^0(x,t)$$

با توجه به رابطه بالا و با دقت در نحوه بدست آمدن آنها خواهيم ديد که عبارت کلي ميدان مرتبه n -ام به اين صورت است:

$$E^n(x,t)=(-\frac{c_e}{n})^nQ_n(z)E^0(x,t)$$

که در آن Q_n يک چند جمله اي مرتبه n از متغير $Z=-2ikx$ است.$(Q_2=\frac{(1+z+z^2)}{2},Q_1=\frac{1+z}{2},Q_0=1)$

جريان قطبشي حاصل خواهد بود:

$$J^{n+1}(x,t)=\frac{1}{2}(-\frac{c_e}{n})^{n+1}E^0(x,t)\times(\int_0^z Q_n(z')dz'+e^z\int_z^\infty Q_n(z')e^{-z'}dz')$$

اين يعني Q_n از رابطه بازگشتي زير پيروي مي كند (چه رابطه سر راستي!)

$$Q_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\int_0^z Q_n(z')dz'+e^z\int_z^\infty Q_n(z')e^{-z'}dz'\right)$$

كار ما در شماره بعد استفاده از اين رابطه بازگشتي براي محاسبه ميدان نهايي خواهد بود.